弾性逆問題における等価介在物法について

On Equivalent Inclusion Method of Elastic Inverse Problems

歯学部 大崎弥枝子

Yaeko OHSAKI

Physics Laboratory, The Nippon Dental University,
Fujimi, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8159, JAPAN

(2003 年 11 月 28 日　受理)

様々な現象の解析にはその数理モデル化が重要である．対象となる場の支配方程式を境界条件や初期条件の下で解く，いわゆる順問題としての設定の他に，逆に観測データなど結果から原因を推定する逆問題の設定も必要である．一方，近年コンピュータのハードウェアとソフトウェア両面における急速な発展によって，数理解析や計測機器についての発達もめざましい．数値解析法として差分法 (FDM) や有限要素法 (FEM) の領域型解法だけでなく，境界型解法の境界要素法 (BEM) の進展も著しい．入力データが膨大となる FDM や FEM に比べ，入力や計算時間を大幅に減少させることができ，問題の次元を一つ下げて取り扱うことができる BEM の有用性が認められてきている．多くの線形問題では，境界表面だけを要素分割するだけでよく，支配微分方程式をこれと等価な境界積分方程式に変換したのち，これを FEM と同じ離散化を行って数値解を求めようとする BEM は連続体力学のほとんどあらゆる問題に適用でき，線形弾性や熱弾性問題で広く応用されてきている．

また一方材料科学に関しても近年進展が著しく，様々な材質のものが開発され，用途に応じた複合材料が設計されて製造されている．その材料の利用には材質特性と共にそれに関係する力や変形による変化の解析が重要である．逆に望ましい変形や変化のための解析やいろいろな材質の組み合わせによる新しい材料のための解析等に新しい理論や手法が必要とされ，逆解析の要望も多い．

ここでは弾性力学の基礎や静，動弾性の境界要素法を用いた解法などの簡単な説明と弾性逆問題における等価介在物法について紹介する．

一般に弾性体の力学は静的および動的問題として，理論的に二つに分けて考えられている．一方，材料の特性と無関係な普遍的概念である運動学を動力学と明確に区別する立場もある [1]．

弾性体の静力学問題において，次の 3 式が基本的である．

ひずみテンソル e_{kl} と変位ベクトル u_i との関係：

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1}$$

物体力 f_i が働いているときの応力テンソルとのつりあいの式：

$$\sigma_{ij,i} + f_i = 0 \tag{2}$$

応力とひずみを関係付ける構成式：応力とひずみが比例関係にあるとみなせる弾性変形ではひずみテンソル e_{kl} と応力テンソル σ_{ij} は次のフックの法則を満たす．

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \tag{3}$$

ここで C_{ijkl} は弾性係数テンソルである．このような弾性体をフック弾性体という．なお， $u_{k,l}$ は $\partial u_k/\partial x_l$ を表し，添字の重複はその添字について次元の数だけの和をとるアインシュタインの総和規約に従うものとする．

均質等方的な弾性体では構成式をラメ (Lame) の定数 λ と μ を用いて書き換えると次のようになる．

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{mm}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{4}$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり，λ，μ とヤング率 E, 剛性率 G, 体積弾性率 K, およびポアッソン比 ν との間には次の関係がある．

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{3\nu K}{1+\nu} \tag{5}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6}$$

物体力 f_i が働いている静弾性問題で変位成分 u_i で表した次の支配方程式をナビエ (Navier) 方程式という．

$$C_{ijkl}u_{k,lj} + f_i = 0 \tag{7}$$

境界 S をもった領域 D 内のこの方程式を境界要素法で解くと [2]，重み関数 $u^\dagger$ をかけて得られる重みつき残差表示は

$$\int_D (C_{ijmn}u_{m,nj} + f_i)u^\dagger_{ki}dD = 0 \tag{8}$$

この式に発散定理を 2 回適用すれば次式が得られる.

$$\int_D (C_{mnij}u^{\dagger}_{ki,jn})u_m dD + \int_S u^{\dagger}_{kl}t_l dS - \int_S t^{\dagger}_{kl}u_l dS + \int_D u^{\dagger}_{kl}f_l dD = 0 \tag{9}$$

ここで, n を S 上の外向き法線ベクトルとして

$$t^{\dagger}_{kl} = C_{lmij}u^{\dagger}_{ki,j}n_m \tag{10}$$

$$t_l = C_{lmij}u_{i,j}n_m \tag{11}$$

これらは境界面に作用する力であるトラクションに関係する量である. 重み関数 $u^{\dagger}$ としては, 考えている弾性体と同じ性質をもつ無限媒体を考え

$$C_{mnij}u^{\dagger}_{ki,jn}(x,y) + \delta_{km}\delta(x-y) = 0 \tag{12}$$

を満足する 2 点関数を用いる. ただし, $\delta(x-y)$ はディラックのデルタ関数である. 均質等方な弾性体では重み関数 $u^{\dagger}$ はケルビン (Kelvin) 解として知られている基本解なので, 結局次の境界積分方程式を導くことができる.

$$c_{kl}(y)u_l(y) + \int_S t^{\dagger}_{kl}(x,y)u_l(x)dS(x) - \int_S u^{\dagger}_{kl}(x,y)t_l(x)dS(x) = \int_D u^{\dagger}_{kl}(x,y)f_l(x)dD(x) \tag{13}$$

ここで係数 c_{kl} は点 y における境界の幾何学的性質から決まる定数で, 滑らかな境界点では $c_{kl} = \delta_{kl}/2$ である. 境界上の変位 u_l と表面力 t_l の関係を表しているこの境界積分方程式は離散化すれば, 境界上の節点量に関する代数方程式が得られ, 次のように表すことができる.

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{f\} \tag{14}$$

ただし, $\{f\}$ は与えられた物体力を積分して得られる既知のベクトルである. 平面弾性問題でいえば, 境界上の全節点数を M とすれば $(2M) \times 2$ 個の節点量 $\{u\}$ と $\{t\}$ のうち $2M$ 個の値が境界条件から規定されるので, 未知節点量について解くことができる. 境界上の未知節点量が求められると, 領域内の変位や応力などが計算できる.

次に領域 D, 境界を S とする均質等方線形弾性体の動弾性問題を考える. ひずみは微小であると仮定し, D 内の任意の点 x での時刻 t における変位を $u_i(x,t)$ と表す. 物体力がない場合に変位で表した運動方程式は次のようになる.

$$(v_1^2 - v_2^2)u_{i,ij}(x,t) + v_2^2 u_{j,ii}(x,t) = \ddot{u}_j(x) \tag{15}$$

ここで, 上付きドットは時間微分を表し, v_1,v_2 はそれぞれ縦波と横波の伝播速度で、材料密度 ρ と Lame の定数 λ, μ を用いると次式で与えられる.

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{16}$$

動弾性問題の初期条件と境界条件は次のように表すことができる. 初期条件は　$t=0$,　$x \in D \cup S$ において

$$\begin{cases} u_i(x,0) = u_i^0(x) \\ \dot{u}_i(x,0) = v_i^0(x) \end{cases} \tag{17}$$

ここで, $u_i^0(x)$ と $v_i^0(x)$ は与えられた関数である.
境界条件は

$$\begin{cases} u_i(x,t) = \bar{u}_i(x,t); \qquad t>0, \quad x \in S_1 \\ p_i(x,t) \equiv \sigma_{ij}(x,t)n_j(x) = \bar{p}_i(x,t); \; t>0, \; x \in S_2 \end{cases} \tag{18}$$

ただし, 上付きバーは規定された量であることを示し, $S = S_1 \cup S_2$ である.

逆問題解法の一つは境界上のいくつかの点で測定した変位やひずみと, 境界要素法順解析により計算した対応する変位やひずみとの残差二乗和を最小にする最適化問題に帰着させて解析する [2].

ところで現実の物質は一様な材質だけから成り立っているのではなく, しばしば異なった材質の介在物や空洞が内在している. そのような介在物の内在する物質を扱う方法の一つとして等価介在物法 [3] がある. 一様な応力を受ける無限物体の中に楕円形の介在物がある場合にひずみの分布について解析解を与え, 複合材料などの逆解析の手法に用いられている [4-7].

母材 M の領域の一部 Ω に介在物が存在するような場合に全ひずみ ϵ_{ij} を弾性ひずみ e_{ij} とアイゲンひずみ ϵ^*_{ij} の和として次のように表わす.

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \epsilon^*_{ij} \tag{19}$$

このアイゲンひずみ ϵ^*_{ij} は塑性ひずみや熱ひずみのような非弾性ひずみである. 全ひずみの変位 u_i との関係は

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{20}$$

であるので, 構成式は

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon^*_{kl}) \tag{21}$$

したがって弾性係数の対称性 $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ を考慮して

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(u_{k,l} - \epsilon^*_{kl}) \tag{22}$$

と書き換えることができる．等方的な物体では

$$\sigma_{ij} = \lambda(\epsilon_{mm} - \epsilon^*_{mm})\delta_{ij} + 2\mu(\epsilon_{ij} - \epsilon^*_{ij}) \tag{23}$$

ひずみ ϵ に対応する応力を σ^ν, アイゲンひずみ ϵ^* から生ずる応力を σ^* とすれば，それぞれ

$$\sigma^\nu_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{24}$$

$$\sigma^*_{ij} = C_{ijkl}\epsilon^*_{kl} \tag{25}$$

したがって

$$\sigma_{ij} = \sigma^\nu_{ij} - \sigma^*_{ij} \tag{26}$$

領域内でつりあいが成立していることから，次式が成り立つ.

$$\sigma_{ij,i} = 0 \tag{27}$$

したがって

$$\sigma^\nu_{ij,i} = \sigma^*_{ij,i} \tag{28}$$

を得る.

一方，トラクションの連続という境界条件を満たすために, 次のように場所の関数として弾性テンソル C_{ijkl} を定義する [4].

$$C_{ijkl} = \begin{cases} C^M_{ijkl} & (\text{M 内}) \\ C^\Omega_{ijkl} & (\Omega\text{内}) \end{cases} \tag{29}$$

ここで M は母材，Ω は介在物の領域を指す.

この場所によって変る係数 C_{ijkl} を用いて，基本式から導かれる支配方程式を表すと, 次のようになる.

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,i} = 0 \tag{30}$$

このように等価介在物法では物体内におけるつりあいと境界条件より，境界における値から等価な弾性特性を推測して，内部における不均一性の情報を得ることができる.

等価介在物法を用いた逆解析の不均一・非弾性材料制御への応用にむけての研究 [6] に次のような例がある.

平面ひずみ状態にある非弾性材料の変形：
体積変化が無いと仮定した 2 次元の場合,

$$\epsilon^*_{11} + \epsilon^*_{22} = 0 \tag{31}$$

$$\epsilon^*_{33} = 0 \tag{32}$$

が成り立ち,

$$\sigma^*_{11} + \sigma^*_{22} = 0 \tag{33}$$

を得て，(28) 式は

$$\sigma^*_{11,1} + \sigma^*_{12,2} = \sigma^\nu_{11,1} + \sigma^\nu_{12,2} \tag{34}$$

$$\sigma^*_{21,1} + \sigma^*_{22,2} = \sigma^\nu_{21,1} + \sigma^\nu_{22,2} \tag{35}$$

となる．これらをさらに偏微分して (31) 式と $\sigma^*_{12} = \sigma^*_{21}$ を使って, 和と差をつくると

$$\sigma^*_{11,11} + \sigma^*_{11,22} = \sigma^\nu_{11,11} - \sigma^\nu_{22,22} \tag{36}$$

$$\sigma^*_{12,11} + \sigma^*_{12,22} = \sigma^\nu_{12,11} + \sigma^\nu_{12,22} + \sigma^\nu_{11,12} + \sigma^\nu_{22,12} \tag{37}$$

が得られる．これらの右辺，領域内の変位，境界での応力が既知であれば，境界での $\sigma^*_{11}, \sigma^*_{12}$ が求められる．(36),(37) 式は境界での σ^*_{11},σ^*_{12} を境界条件とした $\sigma^*_{11}, \sigma^*_{12}$ のポアソン方程式となり，数値的に解くことができて領域内の σ^*_{ij} そして σ_{ij} が求められる.

不均一な薄板の曲げの場合:
xy 方向に拡がり、第 3 軸の z 方向の厚みが一定で，不均一な弾性材料の板を曲げると，$z = 0$ の中心線の変位を u_3, 板の中心からの距離を ζ としたとき，ひずみはそれぞれ次のように得られる.

$$\epsilon_{11} = -\zeta u_{3,11} \tag{38}$$

$$\epsilon_{22} = -\zeta u_{3,22} \tag{39}$$

$$\epsilon_{33} = -\zeta u_{3,33} \tag{40}$$

不均一な材料内で，ポアソン比 ν は一定と仮定して，基準となるヤング率を E_0 とすれば,

$$\sigma^\nu_{11} = \frac{E_0}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}) \tag{41}$$

$$\sigma^\nu_{22} = \frac{E_0}{1-\nu^2}(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}) \tag{42}$$

$$\sigma^\nu_{12} = \frac{E_0}{1+\nu}\epsilon_{12} \tag{43}$$

薄板の曲げにおいては，$\sigma_{33} = 0$，$\epsilon_{33} = 0$ と仮定してよいから，前例と同じように解くことができる.

等価介在物法は動弾性問題にも適用することができる[4]．表面データから内部の材料特性分布を推定するには，適切な境界条件でのデータを利用することが必要で，さまざまな振動数で物体を揺らして，その反応を利用する．動力学的に考えるとき，振動現象は多くの情報が含まれていて，定量的または定性的に同定するのに便利に用いられる[1]．動的状態と静的状態の違いは慣性項であり，運動量を η とするとつりあいの式は

$$\sigma_{ij,i} + \dot{\eta}_i = 0 \tag{44}$$

という運動方程式に代わる．アイゲン応力 σ^* によって応力を $\sigma_{ij} = C^0_{ijkl}\epsilon_{kl} + \sigma^*_{ij}$ と書き換えるのと同様，アイゲン運動量 η^* によって運動量を $\eta_i = \rho^0 v_i + \eta^*_i$ と書き換えると，アイゲン応力とアイゲン運動量が与えられたときの変位の支配方程式は次のようになる．

$$C^0_{ijkl}u_{k,li}(\sigma^*,\eta^*) - \rho^0\ddot{u}_j(\sigma^*,\eta^*) + \sigma^*_{ij,i} - \dot{\eta}^*_i = 0 \tag{45}$$

第3項と第4項を物体力とみなせば，この式は弾性 C^0_{ijkl}，質量 ρ^0 の均一体の動弾性支配方程式である．この変位からひずみと速度を計算して，それを $\epsilon_{ij}(\sigma^*,\eta^*)$ と $v_i(\sigma^*,\eta^*)$ とすると，アイゲン応力とアイゲン運動量の等価条件をつぎのように表すことができる．

$$\left\{\begin{array}{l} C_{ijkl}\epsilon_{ij}(\sigma^*,\eta^*) = C^0_{ijkl}\epsilon_{kl} + \sigma^*_{ij} \\ \rho v_i(\sigma^*,\eta^*) = \quad \rho^0 v_i(\sigma^*,\eta^*) + \eta^*_i \end{array}\right. \tag{46}$$

簡単のため，表面の1点に角振動数 ω で集中荷重 $\bar{t}$ を加えた場合，載下点を除き表面はトラクションフリーで，各点の振幅 $\bar{u}_i$ が計測されるものとする．調和振動をする変位 u_i に対して次の境界値問題を設定することができる．

$$\left\{\begin{array}{l} C^0_{ijkl}u_{k,li} + \omega^2\rho^0 u_j + \sigma^*_{ij,i} + i\omega\eta^*_i = 0 \\ \hfill (V^* \text{内}) \\ u_i = \bar{u}_i \quad \text{および} \quad n_i(C^0_{ijkl}u_{k,l} + \sigma^*_{ij}) = \delta\bar{t}_j \\ \hfill (\partial V^* \text{上}) \end{array}\right. \tag{47}$$

均一体 V^* と同じ弾性と密度をもつ無限体の基本解を g^0_{ij} とし，載下点を原点にとって位置ベクトルと周波数を明記して，θ は V^* の中では1，境界 ∂V^* の上では 1/2 であるとすると，この境界値問題の解を次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \theta(x)u_i(x,\omega) = & \\ & \int_{V^*} g^0_{ip}(y-x,\omega)(\sigma^*_{qp,q}(y,\omega) - i\omega\eta^*_p(y,\omega))dVy \\ & + \int_{\partial V^*} g^{0t}_{ip}(y,y-x,\omega)\bar{u}_p(y,\omega)dSy \\ - \int_{\partial V^*} & g^0_{ip}(y-x,\omega)(\delta(y)\bar{t}_p - n_q(y)\sigma^*_{qp}(y,\omega))dSy \end{aligned} \tag{48}$$

ここで

$$g^{0t}_{ip}(y,y-x,\omega) = n_j(y)C^0_{ijkl}g^0_{ip,l}(y-x,\omega) \tag{49}$$

である．

内部の弾性テンソルと密度の分布を推定するためにはまず (48) 式を用いてアイゲン応力とアイゲン密度を推定し，ついで (46) 式から弾性テンソルと密度を推定することになる．状況に応じてそれぞれ次のような式を用いる．

$\bar{u}$ から σ^*_{ij} と η^*_i を推定する逆問題：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\bar{u}_i(x,\omega) - g^0_{ip}(x,\omega)\bar{t}_p \\ & \qquad + \int_{\partial V^*} g^{0t}_{ip}(x,x-y,\omega)\bar{u}_p(y,\omega)dSy \\ & = -\int_{V^*}(g^0_{pi,q}(y-x,\omega)\sigma^*_{pq}(y) \\ & \qquad + i\omega g^0_{pi}(y-x,\omega)\eta^*_k(y))dVy \end{aligned} \tag{50}$$

σ_{ij} と η^*_i から C_{ijkl} と ρ を推定する逆問題：

$$\left\{\begin{array}{l} C_{ijkl}(x)\epsilon_{kl}(x,\omega;\sigma^*,\eta^*) \\ \qquad = C^0_{ijkl}\epsilon_{kl}(x,\omega;\sigma^*,\eta^*) + \sigma^*_{ij}(x,\omega) \\ i\omega\rho(x)u_i(x,\omega) \\ \qquad = i\omega\rho^0 u_i(x,\omega;\sigma^*,\eta^*) + \eta^*_i(x,\omega) \end{array}\right. \tag{51}$$

これらの推定は必ずしも容易ではないが，微小な減衰を仮定したり，$u \approx g^0\bar{t}$ 等の近似をし，また基準となる密度との差 $\Delta\rho = \rho - \rho^0$ を計算するなどして，表面の $\bar{u}$ から内部の状態を近似的に求める．

このように等価介在物法による逆問題の解法は，介在物による不均一性の影響に相当する等価なアイゲンひずみを導入することによって，内部に生ずる応力や弾性特性を推定する手法である．しかし定式化において楕円体の介在物が仮定されていたように[3]，より複雑な形状のものに対しては，今のところ必ずしも有用とはいえず，さらに様々な手法が援用される必要がある．

複雑な形状の介在物を含有する材料の研究として，座標と変位を同じ形状関数を用いて座標変換するアイソパラメトリック要素で表現し，解析上必要な領域積分に数値積分を援用することで等価介在物法による弾性特性評価を行った研究がある[7]．

参考文献

1) Bui,H.D.(青木繁　他訳)：材料力学における逆問題, 裳華房 (1994)
2) 日本機会学会編：逆問題のコンピュータアナリシス, コロナ社 (1991)
3) Eshelby,J.D.： Proc. Roy. Soc., **241.A**, 376(1957)
4) 村上章, 登坂宣好, 堀宗朗, 鈴木誠：逆問題解析, コロナ社 (2002)
5) 大崎弥枝子：日本歯科大学紀要（一般教養系）**32**, 31(2003)
6) 亀田敏弘：Transactions of JSCES,Paper Nc.19990007
7) 吉国宏之, 比嘉吉一, 冨田佳宏：第11回計算力学講演会論文集 (1998)